

No.10 略解

問 1

(1) 図 (1) のように考えれば, $t = 0 \sim T$ までの第一波 $f_1(t)$ は次のように書ける。

$$f_1(t) = \left(-\frac{E}{T}t + E\right)u(t) + \frac{E}{T}(t - T)u(t - T)$$

$f_1(t)$ を変時定理を使ってラプラス変換すると次式を得る。

$$F_1(s) = -\frac{E}{T} \frac{1}{s^2} + \frac{E}{s} + \frac{E}{T} \frac{1}{s^2} e^{-Ts} = E \left(\frac{1}{s} - \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts^2} \right)$$

(2) 周期 T の周期関数のラプラス変換 $F(s)$ は次式となる。

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} = E \left(\frac{1}{s(1 - e^{-Ts})} - \frac{1}{Ts^2} \right) = \frac{E}{T} \left\{ \frac{Ts - 1 + e^{-Ts}}{s^2(1 - e^{-Ts})} \right\}$$

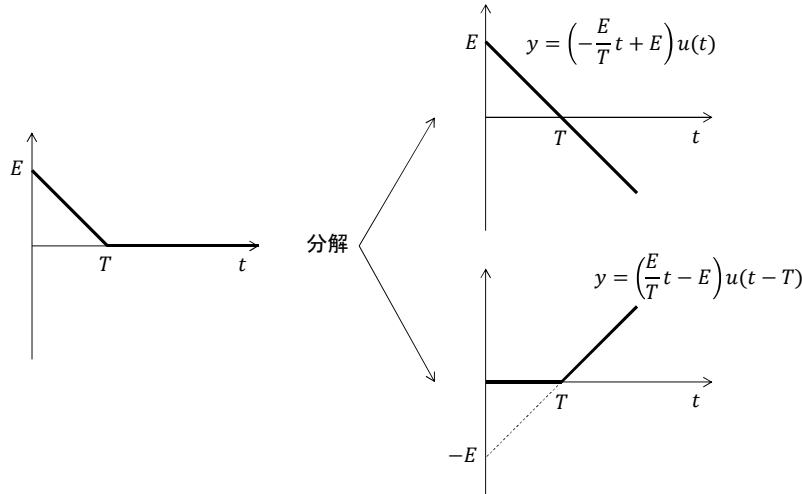


図 (1)

問 2

(1) $F(s)$ を $F(s) = F_1(s)/(1 - e^{-\frac{\pi}{2}s})$ と分解すると $F_1(s)$ が第 1 波のラプラス変換になる。したがって,

$$F_1(s) = F(s)(1 - e^{-\frac{\pi}{2}s}) = \frac{1 - se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1}$$

(2) $F_1(s)$ を変時定理を使って逆ラプラス変換すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1} \right] \\ &= \sin(t)u(t) - \cos(t - \pi/2)u(t - \pi/2) \\ &= \sin(t)u(t) - \sin(t)u(t - \pi/2) \\ &= \sin(t) \{u(t) - u(t - \pi/2)\} \end{aligned}$$

(3) $f(t)$ は (2) で求めた第 1 波が周期 $\pi/2$ で繰り返される波形となるので, これを図示すると図 (2) の一番右図となる。

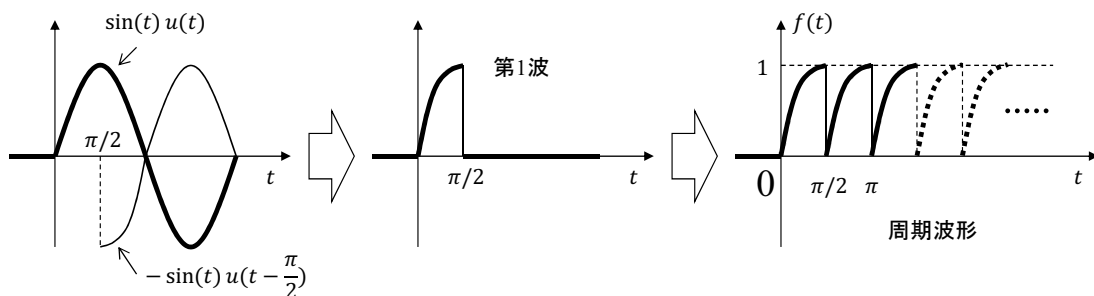


図 (2)