No.12 略解

問 1

(1) C の両端は R_1, R_2, L を経由してつながっているので，C の電荷はやがて 0 になる。よって，定常状態では，C の電荷と回路を流れる電流は 0 となる。このことより，$i_1(0) = 0$, $q(0) = 0$

(2) 回路方程式は

$$R_1 i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} = E$$

これを解いて

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$$

(3) 回路方程式は

$$R_2 i_2(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i_2(t)\,dt = E$$

これを解いて

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2}e^{-\frac{1}{R_2 C}t}$$

(4) $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ を微分して 0 とおく。

$$\frac{E}{L}e^{-\frac{R_1}{L}t} - \frac{E}{R_2^2 C}e^{-\frac{1}{R_2 C}t} = 0$$

これが時間 t によらず成り立つためには，

$$\frac{E}{L} = \frac{E}{R_2^2 C}, \quad \frac{R_1}{L} = \frac{1}{R_2 C}$$

これを解いて次式を得る。

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

問 2

(1) s 回路は図 2 となる。

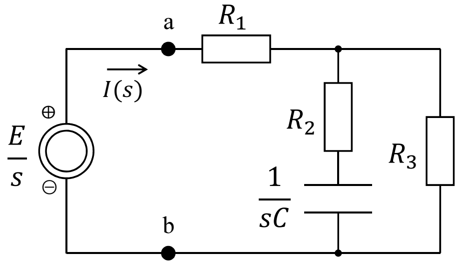

図 1: s 回路

なお，C の初期電荷は 0 なので，初期電荷による電圧源は省略して良い。

(2) $Z(s)$ は R_2 と C の直列接続と R_3 との並列接続に R_1 がさらに直列に接続された場合のインピーダンスなので，次式となる。

$$\begin{aligned} Z(s) &= R_1 + \frac{\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right)R_3}{\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right) + R_3} \\ &= \frac{RCs + R_1 + R_3}{(R_2 + R_3)Cs + 1} \end{aligned}$$

ただし，R は次式で定義した。

$$R = R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3$$

(3)

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E/s}{Z(s)} \\ &= \frac{(R_2 + R_3)Cs + 1}{s(RCs + R_1 + R_3)}E \end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換して

$$i(t) = \frac{E}{R_1 + R_3}\left(1 + \frac{R_3^2}{R}e^{-\frac{R_1 + R_3}{RC}t}\right)$$

ただし，R は次式で定義した。

$$R = R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3$$