

No. 8 略解

問 1

$f(t)$ はステップ関数 $u(t)$ を使って

$$f(t) = u(t) - 3u(t-a) + 2u(t-2a)$$

と表せるので

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] \\ &= \frac{1}{s}(1 - 3e^{-as} + 2e^{-2as}) \\ &= \frac{1}{s}(1 - e^{-as})(1 - 2e^{-as}) \end{aligned}$$

問 2

(1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(t-2)u(t-2)] &= e^{-2s} \mathcal{L}[(\cos t)u(t)] \\ &= e^{-2s} \frac{s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(t+2)u(t-2)] &= e^{-2s} \mathcal{L}[\{(t+2) + 2\}u(t)] \\ &= e^{-2s} \mathcal{L}[(t+4)] \\ &= e^{-2s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s} \right) \\ &= e^{-2s} \frac{4s + 1}{s^2} \end{aligned}$$

(3)

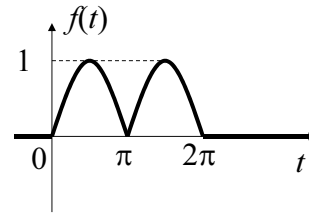
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\sin t u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] &= e^{-\frac{\pi}{2}s} \mathcal{L}\left[\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}s} \mathcal{L}[\cos t] \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(t^2 + 1)u(t-2)] &= e^{-2s} \mathcal{L}[\{(t+2)^2 + 1\}u(t)] \\ &= e^{-2s} \mathcal{L}[(t^2 + 4t + 5)u(t)] \\ &= e^{-2s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{5}{s} \right) \\ &= e^{-2s} \left(\frac{5s^2 + 4s + 2}{s^3} \right) \end{aligned}$$

問 3

グラフは以下の通り。



したがって, $f(t)$ は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} f(t) &= \{\sin t \cdot u(t) + \sin(t-\pi) \cdot u(t-\pi)\} + \\ &\quad \{\sin(t-\pi) \cdot u(t-\pi) + \sin(t-2\pi) \cdot u(t-2\pi)\} \\ &= \sin t \cdot u(t) + 2\sin(t-\pi) \cdot u(t-\pi) \\ &\quad + \sin(t-2\pi) \cdot u(t-2\pi) \end{aligned}$$

以上から, $F(s)$ は

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[\sin t] + 2e^{-\pi s} \mathcal{L}[\sin t] + e^{-2\pi s} \mathcal{L}[\sin t] \\ &= (1 + 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}) \mathcal{L}[\sin t] \\ &= \frac{(1 + e^{-\pi s})^2}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$