第12章　制御系の定常特性

フィードバック制御系と偏差

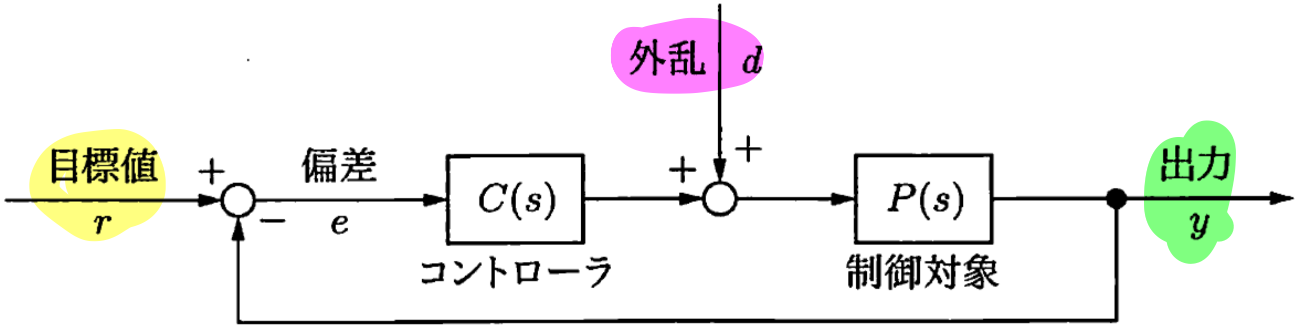


図 12.1　フィードバック制御系

$$y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}r(s) + \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}d(s)$$

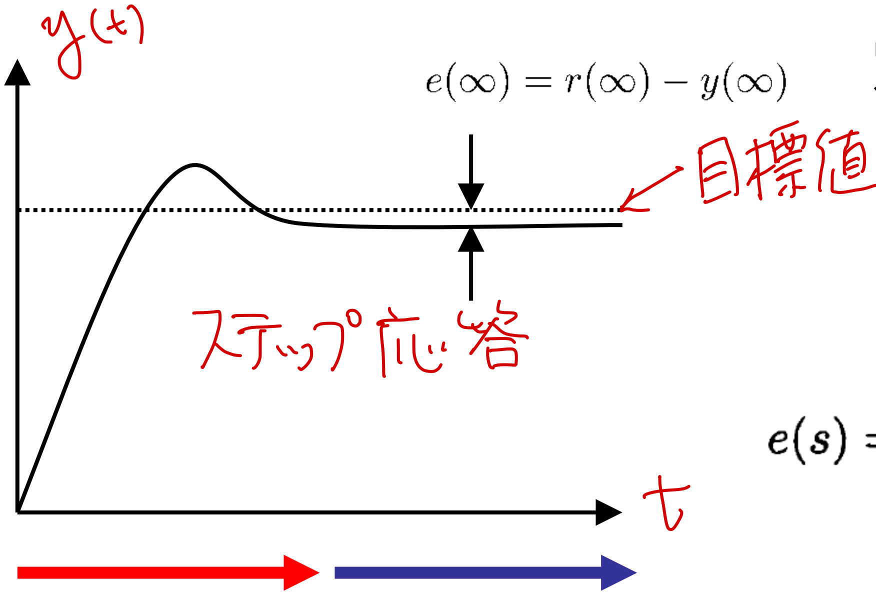
$$e(s) = r(s) - y(s)$$ （偏差）

偏差

$$\boxed{e(s)} = \frac{1}{1+P(s)C(s)}r(s) - \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}d(s)$$

定常特性と定常偏差

最終値の定理



過渡特性　定常特性

定常偏差

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} se(s)$$

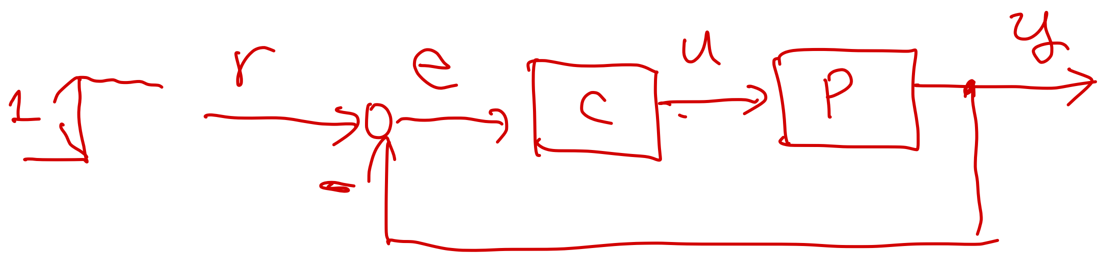
$$e(s) = \boxed{\frac{1}{1+P(s)C(s)}r(s)} - \boxed{\frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}d(s)}$$

目標値に対する影響と
外乱に対する影響は独立に評価できる
（重ね合わせの理）

例題

制御対象 $P = 1/(s+2)$ と制御器 $\overset{C}{\cancel{K}}$ で構成されるフィードバック制御系の目標入力に単位ステップ入力を加えた。このとき，次の2種類の制御器について，定常偏差を求めよ。ただし，$k > 0$ とする。

$$\underset{C}{\cancel{K}} = k, \quad \underset{C}{\cancel{K}} = \frac{k}{s}$$



$$\varepsilon = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s\,e(s)$$

$$e(s) = \frac{1}{1+PC} r = \frac{1}{1+PC} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\therefore \varepsilon = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1+PC} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \boxed{\lim_{s \to 0} \frac{1}{1+PC}} \; //$$

解答例

$L = PC$

- $\cancel{K}$ C $= k$ の場合

$$e = \frac{1}{1+L}r = \frac{1}{1+\frac{k}{s+2}}\cdot\frac{1}{s} = \frac{s+2}{s+2+k}\cdot\frac{1}{s} = \frac{s+2}{s(s+2+k)}$$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+L}r = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s+2}{s(s+2+k)} = \boxed{\frac{2}{k+2}}$$

- $\cancel{K}$ C $= \frac{k}{s}$ の場合

$$e = \frac{1}{1+L}r = \frac{1}{1+\frac{k}{s(s+2)}}\cdot\frac{1}{s} = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+k}\cdot\frac{1}{s} = \frac{s+2}{s^2+2s+k}$$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+L}r = \lim_{s\to 0}\frac{s(s+2)}{s^2+2s+k} = \boxed{0}$$

(kによらない)

準備

開ループ伝達関数 $L = PK$ の原点極をすべて抜き出す

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{1}{s^p}\tilde{L}(s)$$

ここで，$\tilde{L}(0)$ は定数になることに注意しておく。

p は L に含まれる原点極の数

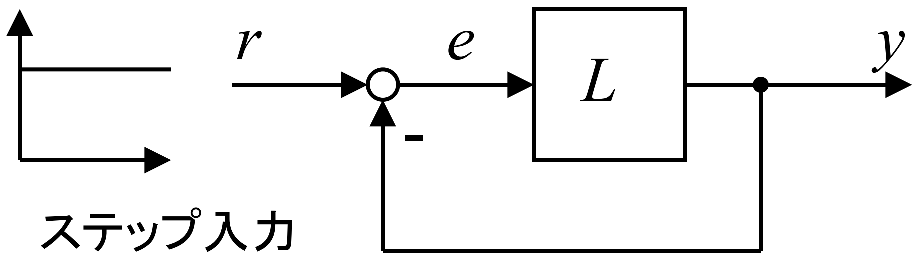
制御系の
「型」
と呼ばれる

$p = 1$

例 $L = \dfrac{4}{s(s+1)} = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{4}{s+1}$

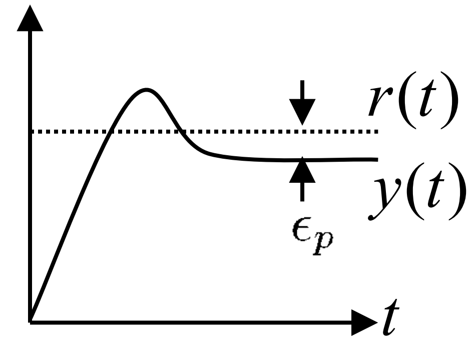
$\tilde{L}(s)$

定常位置偏差



ステップ入力

$$r(s)=\frac{1}{s}$$



定常位置偏差

ステップ入力に対する定常偏差
➔ 定常位置偏差 ε_p

定常位置偏差

$$\epsilon_p = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+L(s)}r = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{s^p}\tilde{L}(s)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$= \boxed{\lim_{s\to 0}\frac{s^p}{s^p+\tilde{L}(s)}}$$

$p=0,1,2$　　$\tilde{L}(0)$ は定数

※定常位置偏差を$p=1,2,3$について計算してみよう

型数と定常位置偏差

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^p}{s^p + \tilde{L}(s)}$$

- p=0 の場合（0 型）

$$\epsilon_p = e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^0}{s^0 + \tilde{L}(s)} = \frac{1}{1 + \tilde{L}(0)} \neq 0$$

- p=1 の場合（1 型）

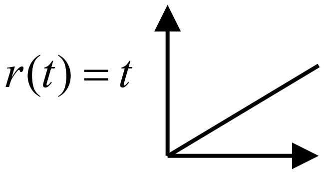
$$\epsilon_p = e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^1}{s^1 + \tilde{L}(0)} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s + \tilde{L}(s)} = 0$$

- p=2 の場合（2 型）

$$\epsilon_p = e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2}{s^2 + \tilde{L}(s)} = 0$$

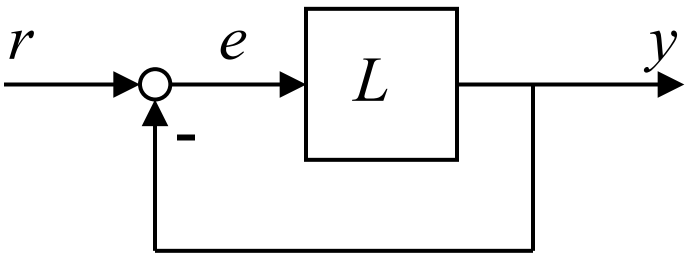
Lに積分器が1個以上含まれると定常位置偏差は0になる

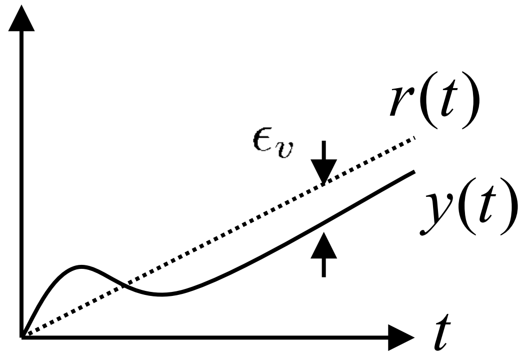
定常速度偏差



ランプ入力

$r(s) = \frac{1}{s^2}$





定常速度偏差

ランプ入力に対する定常偏差
➔ 定常速度偏差 ε_v

定常速度偏差

$$\epsilon_v = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+L(s)} r = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{s^p}\tilde{L}(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \boxed{\lim_{s\to 0} \frac{s^{p-1}}{s^p + \tilde{L}(s)}}$$

0, 1, 2

※定常速度偏差をp = 1,2,3について計算してみよう

型数と定常速度偏差

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{p-1}}{s^p + \tilde{L}(s)}$$

- p=**0** の場合（**0** 型）

$$\epsilon_v = e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{-1}}{s^0 + \tilde{L}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(1+\tilde{L}(s))} = \infty$$

- p=**1** の場合（**1** 型）

$$\epsilon_v = e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^0}{s^1 + \tilde{L}(0)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + \tilde{L}(s)} = \frac{1}{\tilde{L}(0)} \neq 0$$

- p=**2** の場合（**2** 型）

$$\epsilon_v = e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^1}{s^2 + \tilde{L}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2 + \tilde{L}(s)} = 0$$

Lに積分器が2個以上含まれると定常速度偏差は0になる

制御系の型と定常偏差

表 12.1　制御系の型と定常偏差

型	定常位置偏差（ε_p）	定常速度偏差（ε_v）	定常加速度偏差（ε_a）
0	$\dfrac{1}{1+K}$	∞	∞
1	0	$\dfrac{1}{K}$	∞
2	0	0	$\dfrac{1}{K}$

通常 積分器は1個まで → 多くなると安定化が
むずかしくなる

【参考】定常加速度偏差

$$\varepsilon_a = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+\dfrac{K}{s^{p-2}}}$$

例題12.1

ラウス・フルビッツ

図 12.4 に示すフィードバック制御系が，安定で，かつ定常位置偏差が 0.1 以下になるようなゲイン K を求めなさい．

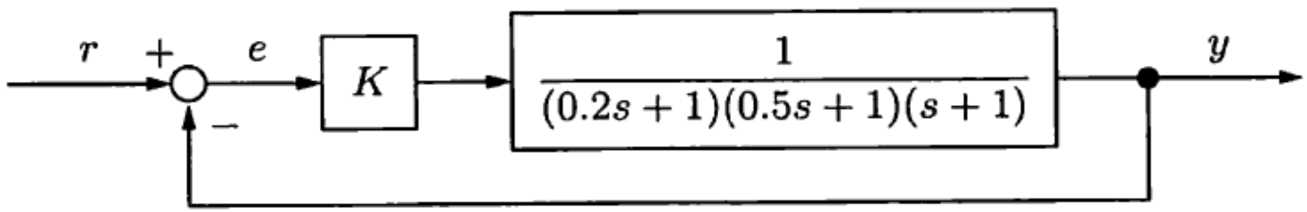


図 12.4

安定性

$$1 + \frac{1}{(0.2s+1)(0.5s+1)(s+1)} = 0$$ の根の実部がすべて負

⇒ ラウス・フルビッツの安定判別法の利用

解答

解答 一巡伝達関数は，

$$L(s) = \frac{K}{(0.2s+1)(0.5s+1)(s+1)}$$

であるので，特性方程式は

$1 + L = 0$

$$\boxed{s^3 + 8s^2 + 17s + 10(1+K) = 0}$$

となる．これに対してラウス表を作成すると，以下のようになる．

s^3	1	17
s^2	8	$10(1+K)$
s^1	$\dfrac{17 \times 8 - 10(1+K)}{8}$	
s^0	$10(1+K)$	

第1列がすべて正になるというラウスの安定条件より，

$$\boxed{-1 < K < 12.6}$$

を得る．次に，定常位置偏差に対する条件

$$\varepsilon_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+K} \leq 0.1$$

より，$K \geq 9$ を得る．以上より

$$\boxed{9 \leq K < 12.6}$$

が得られる．

2020 1/16