No.13 略解

問 1

(1) 図 (1) のように考えれば，$t=0\sim T$ までの第一波 $f_1(t)$ は次のように書ける。

$$f_1(t)=(-\frac{E}{T}t+E)u(t)+\frac{E}{T}(t-T)u(t-T)$$

$f_1(t)$ を変時定理を使ってラプラス変換すると次式を得る。

$$F_1(s)=-\frac{E}{T}\frac{1}{s^2}+\frac{E}{s}+\frac{E}{T}\frac{1}{s^2}e^{-Ts}=E\left(\frac{1}{s}-\frac{1-e^{-Ts}}{Ts^2}\right)$$

(2) 周期 T の周期関数のラプラス変換 $F(s)$ は次式となる。

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}}=E\left(\frac{1}{s(1-e^{-Ts})}-\frac{1}{Ts^2}\right)=\frac{E}{T}\,\frac{Ts-1+e^{-Ts}}{s^2(1-e^{-Ts})}$$

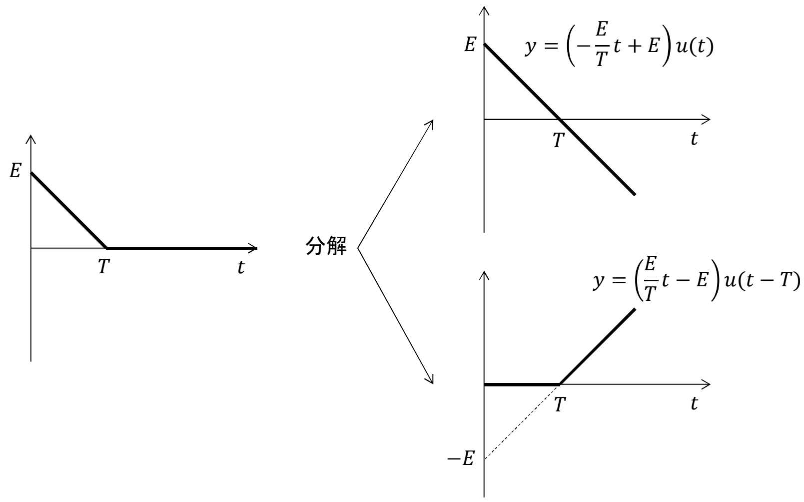

図 (1)

問 2

(1) $F(s)$ を次のように分解すると $F_1(s)$ が第 1 波のラプラス変換になる。

$$F(s)=F_1(s)\cdot\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s})},\quad \text{ただし}\quad F_1(s)=\frac{1-s\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

(2) $F_1(s)$ を変時定理を使って逆ラプラス変換すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1-s\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}-\frac{s\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}\right]\\ &= \sin(t)u(t)-\cos(t-\pi/2)u(t-\pi/2)\\ &= \sin(t)u(t)-\sin(t)u(t-\pi/2)\\ &= \sin(t)\left\{u(t)-u(t-\pi/2)\right\}\end{aligned}$$

(3) $f(t)$ は (2) で求めた第 1 波が周期 $\pi/2$ で繰り返される波形となるので，これを図示すると図 (2) の一番右図となる。

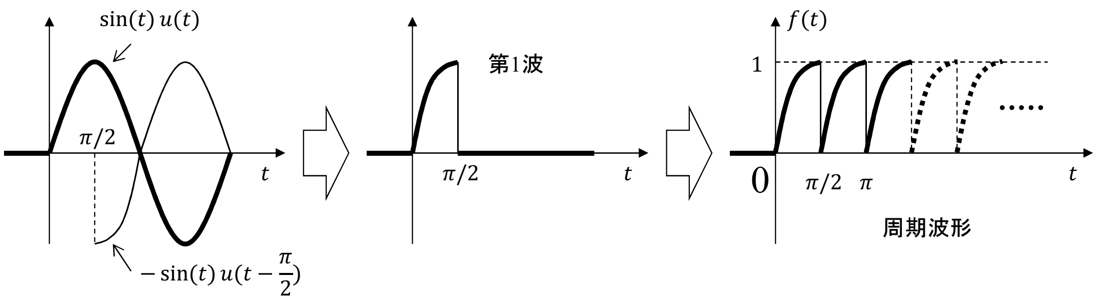

図 (2)